

**LRDIS**

We know

**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**SĂ ÎNVĂȚĂM  
MATEMATICĂ  
FĂRĂ PROFESOR  
CLASA A XI – A  
PROFIL TEHNOLOGIC**

**EDITURA HYPERION  
CRAIOVA 2022**

## CUPRINS

	Enunțuri Rezolvări	
1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare .....	5	139
1.1 Matrice .....	5	139
1.2 Determinanți .....	19	142
1.2.1 Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți .....	19	142
1.2.2 Aplicațiile determinanților în geometria plană: ecuația unei drepte determinată de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniari- tatea a trei puncte în plan .....	27	145
1.3 Sisteme de ecuații liniare .....	30	146
1.3.1 Matrice inversabile $M_n(C)$ , $n = 2,3$ . Ecuații matriceale .....	30	146
1.3.2 Sisteme liniare cu cel mult 3 necunos- cute. Forma matriceală a unui sistem. Metode de rezolvare a sistemelor liniare: metoda lui Cramer metoda lui Gauss .....	35	148
1.4 Teste grilă de autoevaluare .....	42	150
Testul 1 .....	42	150
Testul 2 .....	43	151
Testul 3 .....	44	152
Testul 4 .....	45	152
Testul 5 .....	46	163
2. Limite de funcții .....	47	154
2.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$ .....	47	154
2.2 Limita unei funcții într-un punct, limite laterale. Operații cu limite de funcții .....	54	155
2.3 Limitele funcțiilor elementare .....	60	156
2.4 Asimptotele funcțiilor reale .....	74	160

2.5	Teste grilă de autoevaluare	78	161
	Testul 1	78	161
	Testul 2	79	162
	Testul 3	80	163
	Testul 4	81	164
	Testul 5	82	165
3.	Funcții continue	83	166
	3.1 Continuitatea unei funcții. Operații cu funcții continue	84	166
	3.2 Proprietăți ale funcțiilor continue	92	169
	3.3 Teste grilă de autoevaluare	95	171
	Testul 1	95	171
	Testul 2	96	171
4.	Funcții derivabile	97	172
	4.1 Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile	97	172
	4.2 Derivatele unor funcții uzuale. Operații cu funcții care admit derivată. Derivarea funcțiilor compuse	104	175
	4.3 Regulile lui l'Hospital	113	176
	4.4 Teste grilă de autoevaluare	118	178
	Testul 1	118	178
	Testul 2	119	179
	Testul 3	120	180
5.	Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	121	181
	5.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	121	181
	5.2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	126	184
	5.3 Reprezentarea grafică a funcțiilor	129	185
	5.4 Teste grilă de autoevaluare	137	186
	Testul 1	137	186

## 1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

### 1.1 Matrice

#### a) Noțiuni teoretice și exemple

##### Noțiunea de matrice

**Definiție.** Numim matrice de tipul  $(m, n)$  cu elemente numere complexe, o funcție  $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Notăm  $A(i, j) = a_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  și ele se numesc **elementele** matricei.

Notăm  $M_{m,n}(\mathbb{C})$  mulțimea matricelor de  $m$  linii și  $n$  coloane cu coeficienți în  $\mathbb{C}$ .

Notăm  $M_n(\mathbb{C})$  mulțimea matricelor de  $n$  linii și  $n$  coloane cu coeficienți în  $\mathbb{C}$ .

**Exemple.** a) Pentru  $m = n = 2$  avem:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

b) Pentru  $m = 3, n = 1$  obținem matricea coloană  $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ .

c) Pentru  $m = 1, n = 2$  obținem matricea linie  $A = (a_{11} \ a_{12})$ .

##### Egalitatea matricelor

**Definiție.** Două matrice  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  sunt egale dacă are loc egalitatea  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $(\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$  și  $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exemplu.** Matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x+1 & 3 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  sunt egale dacă:  $1 = x, x = 1, x + 1 = 2, 3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$ .

##### Operații cu matrice

###### 1) Adunarea matricelor

**Definiție.** Fiind date  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , numim suma matricelor  $A$  și  $B$ , matricea  $C$  ale cărei elemente sunt date de egalitățile  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $(\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$  și  $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

###### Proprietăți ale adunării matricelor

a) Comutativitatea -  $A + B = B + A$   $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ .

b) Asociativitatea:  $(A + B) + C = A + (B + C)$   $(\forall) A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ .

c) Elementul neutru - este matricea nulă  $O_{mn}$  deoarece:

$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A, (\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$

d) Element invers -  $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), (\exists) A' = -A$  astfel încât  $A + A' = A' + A = O_{mn}$ . Matricea  $A'$  se numește opusa matricei  $A$ .

## 2) Înmulțirea cu scalari a matricelor

**Definiție.** Fiind dată matricea  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $\alpha \in \mathbb{C}$  numim produsul dintre numărul  $\alpha$  și matricea  $A$ , matricea  $B$ , ale cărei elemente sunt date de egalitățile  $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} (\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$  și  $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exemple.** a) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , atunci  $6 \cdot A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$ .

### Proprietăți ale înmulțirii cu scalari

- a)  $1 \cdot A = A, (\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$
- b)  $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$
- c)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$
- d)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$

## 3) Înmulțirea matricelor

**Definiție.** Fiind date  $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , numim produsul matricelor  $A$  și  $B$ , matricea  $C$  ale cărei elemente sunt date de

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \quad (\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ și } (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Exemplu.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , atunci:  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ .

### Proprietăți ale înmulțirii matricelor

- a) Asociativitatea:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) (\forall) A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$
- b) Elementul neutru în  $M_n(\mathbb{C})$  este matricea unitate  $I_n$  deoa-

rece:  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, (\forall) A \in M_n(\mathbb{C})$ , unde  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Distribuțivitatea la stânga a înmulțirii față de adunarea matricelor:  $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$  atunci are loc egalitatea:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

### Transpusa unei matrice

**Definiție.** Fiind dată matricea  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , numim transpusa matricei  $A$ , matricea notată  ${}^tA = (b_{kl}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ , unde  $b_{kl} = a_{lk}$ ,  $(\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}$  și  $(\forall) l \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Exemplu.** Fiind dată  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , atunci transpusa matricei  $A$  este matricea  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

### Proprietăți ale operației de transpunere

- a)  $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ , avem:  ${}^t({}^tA) = A$ .  
 b)  $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $(\forall) a \in \mathbb{C}$ , avem:  ${}^t(a \cdot A) = a \cdot {}^tA$ .  
 c)  $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  avem  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ .  
 d)  $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $(\forall) B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ , are loc relația:  
 ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ .

### b) Probleme rezolvate

1. Fie matricele:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculați:

$A + B$ ;  $A - 2B$ ;  $B \cdot A$ .

**Soluție.** a)  $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+1 \\ 3+2 & 7+5 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ .  
 $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 17 & 31 \end{pmatrix}$ .

2. Se consideră matricele:

**LBRIS** We know book

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

- a)  $A + B + C$                       b)  $A + B - C$                       d)  $ABC$ .

**Soluție** a)  $A + B + C = \begin{pmatrix} 1+3-1 & -2+1-3 \\ 3+2+10 & 7+5+9 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}.$

b)  $A + B - C = \begin{pmatrix} 1+3+1 & -2+1+3 \\ 3+2-10 & 7+5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$

c)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 23 & 38 \end{pmatrix}.$

$ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 23 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -89 & -78 \\ 357 & 273 \end{pmatrix}.$

3. Fie matricele:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculați:

- a)  $AB + BA$                       b)  $AB - BA$ .

**Soluție.**  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$  și  
 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$

a)  $AB + BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 19 & 23 \end{pmatrix}.$

b)  $AB - BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Fie matricele:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculați:

- a)  $A^2$                                       b)  $B^2$ .

**Soluție.** a)  $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$

a)  $B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

5. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

și funcția  $f(x) = X^2 + 2X + 4I_2$ . Calculați:

- a)  $f(A)$                       b)  $f(B)$                       c)  $f(AB)$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ ;

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } f(A) = A^2 + 2A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } f(B) = B^2 + 2B + 4I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } f(AB) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Determină matricea  $X$  astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$3X + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Soluție.**  $3X + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

7. Rezolvați sistemul matriceal:

$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Soluție.** Folosim metoda reducerii. Adunând membru cu membru cele două ecuații obținem:  $(X + 2Y) + (X - 2Y) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \text{ sau } 2X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Scăzând membru cu membru cele două ecuații obținem:

$$(X + 2Y) - (X - 2Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

8. Determină  $x, y \in \mathbf{R}$  astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\begin{pmatrix} x+1 & y+2 \\ 2x-1 & 3y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & 2y \end{pmatrix}$$

**Soluție.** Folosind egalitatea matricelor obținem simultan:

$$\begin{aligned} x+1 &= 2; y+2 = 3; 2x-1 = x; 3y-1 = 2y \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= 1; y = 1; x = 1; y = 1 \Rightarrow x = 1; y = 1. \end{aligned}$$

9. Determină matricea  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să aibă loc egalitatea:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** După înmulțirea matricelor obținem egalitatea:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix} \Rightarrow a+c = a-b; \\ b+d &= a+b; -a+c = c-d; -b+d = c+d \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow b &= -c \text{ și } a = d. \text{ Dacă notăm: } a = d = x \text{ și } b = -c = y \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= x, b = y, c = -y, d = x \text{ și matricea este: } \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

10. Se consideră matricele  $A, B$  astfel încât:

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } 2 \cdot A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculează produsul  $A \cdot B$ .

**Soluție.** Se rezolvă sistemul și se obține soluția:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Atunci:  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

11. Determinați puterea  $n$  a matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ .

Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și demonstrăm că  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Într-adevăr } A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Determinați puterea  $n$  a matricii  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ .

Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și demonstrăm că  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Într-adevăr } A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Determinați puterea  $n$  a matricii  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și demonstrăm că  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Într-adevăr } A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Determinați puterea  $n$  a matricii  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$ .

Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$  și demonstrăm că:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Într-adevăr } A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

15. Determinați puterea  $n$  a matricii  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} &\text{Presupunem că } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și demonstrăm că } A^{n+1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Într-adevăr } A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16. Determinați puterea  $n$  a matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$  și  $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$ .

Demonstrăm prin inducție matematică că  $A^{2n} = I_2$  și  $A^{2n+1} = A$ .

a) Presupunem că  $A^{2n} = I_2$  și demonstrăm că  $A^{2(n+1)} = I_2$ .

Într-adevăr  $A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n} \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2$ .

b) Presupunem că  $A^{2n+1} = A$  și demonstrăm că  $A^{2n+3} = A$ .

Într-adevăr  $A^{2n+3} = A^{2n+1} \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A \cdot I_2 = A$ .

17. Determinați puterea  $n$  a matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.** Avem:  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A. \text{ Demonstrăm prin inducție matematică că}$$

$A^n = A$ . Presupunem că  $A^n = A$  și vom demonstra că  $A^{n+1} = A$ .

Într-adevăr  $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A$ .

18. Determinați puterea  $n$  a matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Soluție.**  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}. \text{ Demonstrăm că: } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Presupunem că  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$  și vom demonstra că

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \text{ Într-adevăr } A^{n+1} = A^n \cdot A =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

18. Fie matricea  $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ .

Arătați că  $A_{a+b} = A_a \cdot A_b$  ( $\forall$ )  $a, b \in \mathbf{R}$ .

**Soluție.** Avem:  $A_a \cdot A_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$   
 $= A_{a+b}.$

19. Fie matricele:  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculați  $A^2$  și arătați că  $A^2 = A + 2I$ .

**Soluție.**  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$

## c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculați suma  $A + B$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ . Calculați suma  $A + B$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculați  $A - B$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculați suma  $A + B + C$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculați suma  $A + B - C$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Fie matricile  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculați produsul  $AB$  și arătați că are valoarea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$